JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS 34, 371–395 (1971)

Opérateurs monotones non linéaires dans les espaces de Banach non réflexifs

JEAN-PIERRE GOSSEZ*

Département de Mathématique, Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Belgique

Submitted by J. L. Lions

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est d'essayer d'étendre au cas des espaces de Banach *quelconques* plusieurs résultats de la théorie des opérateurs monotones dans les espaces de Banach *réflexifs*.

Le développement de la théorie dans les espaces de Banach réflexifs repose sur l'étude de la *résolvante* $(\lambda J + T)^{-1}$ d'un opérateur monotone T. Le théorème d'existence fondamental affirme que sous certaines conditions, cette résolvante est partout définie; il n'est plus vrai sans l'hypothèse de réflexivité. On introduit ici pour chaque $\epsilon > 0$ une *résolvante approchée* $(\lambda J_\epsilon + T)^{-1}$, et on démontre pour $(\lambda J_\epsilon + T)^{-1}$ dans le cas général un théorème d'existence analogue à celui connu pour $(\lambda J + T)^{-1}$ dans le cas réflexif. Cette étude conduit à distinguer une classe particulière d'opérateurs, les opérateurs monotones *de type dense*, condition qui apparaît dans la recherche des prolongements monotones d'un opérateur monotone au bidual de l'espace. On montrera qu'entre autres les opérateurs monotones dérivant du calcul des variations sont de type dense. Les N° 2 à 6 traitent ces questions.

Les *applications de dualité approchées* J_ϵ, quoique non monotones, se comportent du point de vue des majorations comme l'*application de dualité* J, ce qui permet souvent d'utiliser la résolvante approchée de la même façon que la résolvante. Les N° 7 à 9 exploitent ce fait pour généraliser au cas non réflexif certaines propriétés des opérateurs monotones connues dans le cas réflexif.

Au N° 10, comme application, on résoud dans le cadre des espaces d'Orlicz (non réflexifs) une équation elliptique contenant une non linéarité de type exponentiel. L'exemple donné comporte de nombreuses variantes.

* Chargé de Recherches du F.N.R.S.

Le plan est le suivant :

1. Préliminaires.
2. Opérateurs monotones de type dense.
3. Exemples.
4. Résolvante approchée.
5. Propriétés de la résolvante approchée.
6. Cas des opérateurs de X^* dans X.
7. Propriétés de convexité.
8. Propriétés de surjectivité.
9. Opérateurs monotones localement bornés.
10. Application.

1. Préliminaires

1. Soit (E, F) un couple d'espaces vectoriels réels en dualité; le produit scalaire entre $x \in E$ et $x^* \in F$ est noté $\langle x, x^* \rangle$.

Un sous-ensemble G de $E \times F$ est dit *monotone* si

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geqslant 0, \qquad \forall (x, x^*) \in G, \qquad \forall (y, y^*) \in G;$$

G est dit *monotone maximal* s'il est maximal parmi les sous-ensembles monotones de $E \times F$ ordonnés par inclusion. Un *opérateur monotone* (resp. *monotone maximal*) $T : E \to F$ est une multi-application de E dans F dont le graphe

$$\operatorname{gr} T = \{(x, x^*) \in E \times F;\ x^* \in Tx\}$$

est un sous-ensemble monotone (resp. monotone maximal) de $E \times F$.

Le domaine et l'image de $T : E \to F$ sont définis respectivement par

$$D(T) = \{x \in E;\ Tx \neq \text{vide}\} \qquad \text{et} \qquad R(T) = \bigcup_{x \in D(T)} Tx,$$

l'opérateur inverse $T^{-1} : F \to E$ par $T^{-1}x^* = \{x \in E;\ x^* \in Tx\}$, et la somme $T_1 + T_2$ de deux opérateurs par

$$(T_1 + T_2)(x) = \{x_1^* + x_2^*;\ x_1^* \in T_1 x \text{ et } x_2^* \in T_2 x\}.$$

On trouvera dans [10, 16] une importante bibliographie au sujet des opérateurs monotones.

2. Dans cet article, X désignera un *espace de Banach réel*, X^* son dual et X^{**} son bidual.

Soit f une fonction convexe définie partout sur X, à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, non identiquement égale à $+\infty$ et semi-continue inférieurement, en abrégé une *fonction convexe propre s.c.i.* sur X. On désigne par dom f, le domaine effectif de f, l'ensemble (convexe) des points où f est finie.

La multi-application $\partial f : X \to X^*$ définie par

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^*; f(y) \geqslant f(x) + \langle y - x, x^* \rangle \ \forall y \in X\}$$

s'appelle le *sous-différentiel* de f. Minty [18] et Moreau [20] dans des cas particuliers puis Rockafellar [23, 24] dans le cas général ont montré que $\partial f : X \to X^*$ est monotone *maximal.*

Rappelons que la conjuguée de f est la fonction f^* sur X^* définie par

$$f^*(x^*) = \sup\{\langle x, x^* \rangle - f(x); x \in X\}, \tag{1.1}$$

et que l'on a

$$\langle x, x^* \rangle \leqslant f(x) + f^*(x^*), \qquad \forall x \in X, \qquad \forall x^* \in X^*,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si $x^* \in \partial f(x)$. On définit de la même façon la conjuguée f^{**} de f^* et le sous-différentiel $\partial f^* : X^* \to X^{**}$, et la restriction de f^{**} à X (considéré comme sous-espace de X^{**}) coïncide avec f et celle de $(\partial f^*)^{-1}$ avec ∂f.

LEMME 1.1 (cf. [21, 22]). *Soient g et h deux fonctions convexes propres s.c.i. sur X. On suppose qu'il existe un point de* dom $g \cap$ dom h *où l'une des deux fonctions est continue. Alors $(g + h)^{**} = g^{**} + h^{**}$ sur X^{**}.*

On utilisera le *sous-différentiel approché* de f qui est la multi-application (généralement non monotone) $\partial_\epsilon f : X \to X^*$ définie pour $\epsilon > 0$ par

$$\begin{aligned}\partial_\epsilon f(x) &= \{x^* \in X^*; f(y) \geqslant f(x) + \langle y - x, x^* \rangle - \epsilon, \forall y \in X\} \\ &= \{x^* \in X^*; \langle x, x^* \rangle \geqslant f(x) + f^*(x^*) - \epsilon\}.\end{aligned}$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, $D(\partial_\epsilon f) = \operatorname{dom} f$.

LEMME 1.2 (cf. [5]). *Soit f une fonction convexe propre s.c.i. sur X. Soient $x^* \in \partial_\epsilon f(x)$ et $\eta > 0$. Il existe $y \in X$ et $y^* \in X^*$ vérifiant $y^* \in \partial f(y)$, $\| y - x \| \leqslant \eta$ et $\| y^* - x^* \| \leqslant \epsilon/\eta$.*

On trouvera dans [21] une importante bibliographie au sujet des fonctions convexes et de la sous-différentiabilité.

3. Soit $\phi : R^+ \to R^+$ une fonction continue strictement croissante telle que $\phi(0) = 0$ et $\phi(r) \to +\infty$ quand $r \to +\infty$. L'*application de dualité* J (de jauge ϕ) de X dans X^* est définie par

$$Jx = \{x^* \in X^*; \langle x, x^* \rangle = \| x \| \| x^* \| \text{ et } \| x^* \| = \phi(\| x \|)\}.$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, $D(J) = X$.

Notons ψ la fonction réciproque de ϕ et posons

$$\Phi(r) = \int_0^r \phi(s)\, ds, \qquad \Psi(r) = \int_0^r \psi(s)\, ds.$$

Asplund [2] a montré que J est un sous-différentiel: $J = \partial j$ où $j(x) = \Phi(\| x \|)$, et il résulte de [1] que $j^*(x^*) = \Psi(\| x^* \|)$ et que $j^{**}(x^{**}) = \Phi(\| x^{**} \|)$.

On définit l'*application de dualité approchée* J_ϵ comme le sous-différentiel approché de j : $x^* \in J_\epsilon x$ si et seulement si

$$\langle x, x^* \rangle \geqslant j(x) + j^*(x^*) - \epsilon.$$

Pour chaque $x \in X$, l'intérieur (pour la norme de X^*) de $J_\epsilon x$ contient Jx. On déduit de l'inégalité de Young

$$rs \leqslant \Phi(r) + \Psi(s), \qquad \forall r, s \in R^+$$

que $x^* \in J_\epsilon x$ entraîne $\langle x, x^* \rangle \geqslant \| x \| \| x^* \| - \epsilon$.

LEMME 1.3. *L'opérateur (non monotone) $J_\epsilon : X \to X^*$ transforme un borné de X en un borné de X^*, et est coercif c'est-à-dire*

$$\frac{\langle x, x^* \rangle}{\| x \|} \to +\infty \qquad \textit{lorsque} \qquad x^* \in J_\epsilon x \quad \textit{et} \quad \| x \| \to +\infty.$$

Démonstration. On déduit de

$$\frac{\Phi(r)}{r} = \frac{1}{r} \int_0^r \phi(s)\, ds \geqslant \frac{1}{r} \int_{r/2}^r \phi(s)\, ds \geqslant \frac{1}{2} \phi\left(\frac{r}{2}\right)$$

et des propriétés de la jauge ϕ que $\Phi(r)/r \to +\infty$ quand $r \to +\infty$; de même $\Psi(r)/r \to +\infty$ quand $r \to +\infty$. Le lemme résulte alors de la définition de J_ϵ. Q.E.D.

2. Opérateurs monotones de type dense

On identifie X à un sous-espace de X^{**} qui est *dense* dans X^{**} pour la topologie la moins fine sur X^{**} rendant continues les applications

$$X^{**} \to R : x^{**} \to \langle x^{**}, x^* \rangle, \qquad \forall x^* \in X^*,$$
$$X^{**} \to R : x^{**} \to \| x^{**} \|$$

(la densité se déduit du fait que la boule unité de X est $\sigma(X^{**}, X^*)$-dense dans la boule unité de X^{**}). Cette topologie sur X^{**}, notée $\mathcal{T}_1$, est plus fine que $\sigma(X^{**}, X^*)$ et moins fine que $\| \|$; ce n'est généralement pas une topologie d'espace vectoriel topologique. On désigne par $\mathcal{T}_2$ la topologie sur $X^{**} \times X^*$ produit de $\mathcal{T}_1$ et de $\| \|$.

Définitions. Un sous-ensemble monotone G de $X \times X^*$ est dit *de type dense* s'il existe un sous-ensemble monotone *maximal* G' de $X^{**} \times X^*$ contenant G tel que G soit *dense* dans G' pour la topologie $\mathcal{T}_2$. Un opérateur monotone $T : X \to X^*$ (resp. $S : X^* \to X$) est dit *de type dense* si son graphe (resp. $\{(x, x^*); (x^*, x) \in \operatorname{gr} S\}$) est un sous-ensemble monotone de type dense de $X \times X^*$.

Soient G un sous-ensemble monotone de $X \times X^*$ et $\bar{G}$ sa fermeture dans $X^{**} \times X^*$ pour $\mathcal{T}_2$. Puisque le produit scalaire $\langle , \rangle$ est continu sur $X^{**} \times X^*$ pour $\mathcal{T}_2$, la fermeture d'un ensemble monotone est monotone, d'où toute extension monotone maximale de G dans $X^{**} \times X^*$ contient $\bar{G}$. G est donc de type dense si et seulement si $\bar{G}$ est monotone *maximal* dans $X^{**} \times X^*$.

Lemme 2.1. *Soit G un sous-ensemble monotone de type dense de $X \times X^*$. Alors $\bar{G}$ est l'unique extension monotone maximale de G dans $X^{**} \times X^*$. De plus $(x^{**}, x^*) \in \bar{G}$ si et seulement si*

$$\langle x^{**} - y, x^* - y^* \rangle \geqslant 0, \qquad \forall (y, y^*) \in G. \tag{2.1}$$

Démonstration. La première partie du lemme résulte du raisonnement ci-dessus. Ensuite, $(x^{**}, x^*) \in \bar{G}$ implique (2.1) car $\bar{G}$ est monotone. Inversément, si (x^{**}, x^*) vérifie (2.1), on a par continuité

$$\langle x^{**} - y^{**}, x^* - y^* \rangle \geqslant 0, \qquad \forall (y^{**}, y^*) \in \bar{G},$$

ce qui montre que $(x^{**}, x^*) \in \bar{G}$ puisque $\bar{G}$ est maximal. Q.E.D.

On note $\bar{T}$ la fermeture de T pour $\mathcal{T}_2$: $\operatorname{gr} \bar{T} = \overline{\operatorname{gr} T}$. L'opérateur monotone $T : X \to X^*$ est donc de type dense si et seulement si l'opérateur monotone $\bar{T} : X^{**} \to X^*$ est *maximal.* Notation analogue pour un opérateur $S : X^* \to X$.

Remarques. 1. Si l'espace de Banach X est *réflexif*, tout opérateur monotone maximal $T: X \to X^*$ est de type dense, et $\bar{T} = T$.

2. Un opérateur monotone de type dense n'est pas nécessairement maximal: prendre $X = R$, $D(T) = \{x \in R; x \neq 0\}$ et $Tx = 0$, $\forall x \in D(T)$.

3. Si X^*, $\| \|$ est séparable, $G \subset X^{**} \times X^*$ est fermé pour $\mathscr{T}_2$ si et seulement si G est séquentiellement fermé pour $\mathscr{T}_2$.

3. Exemples

Théorème 3.1. *Soit f une fonction convexe propre s.c.i. sur X. Son sous-différentiel $\partial f: X \to X^*$ est un opérateur monotone de type dense. De plus*

$$\overline{\partial f} = (\partial f^*)^{-1}.$$

Ce théorème précise un résultat de [24] qui dit que $(x^{**}, x^*) \in \mathrm{gr}(\partial f^*)^{-1}$ si et seulement si il existe une suite généralisée $\{(x_i, x_i^*); i \in I\}$ d'éléments de gr ∂f qui converge vers (x^{**}, x^*) dans $X^{**} \times X^*$ pour la topologie produit de $\sigma(X^{**}, X^*)$ et de $\| \|$ et telle que $\{x_i; i \in I\}$ soit borné dans X. Sa démonstration s'inspire de celle de [24].

Lemme 3.1. *Soit f une fonction convexe propre s.c.i. sur X. Pour tout $x^{**} \in X^{**}$, il existe une suite généralisée $\{x_i; i \in I\}$ dans X telle que*

$$\begin{array}{ccc} x_i \to x^{**} & \textit{pour} & \sigma(X^{**}, X^*), \\ \| x_i \| \to \| x^{**} \| & \textit{et} & f(x_i) \to f^{**}(x^{**}). \end{array} \tag{3.1}$$

On sait [21] que f^{**} est la régularisée s.c.i. de f sur X^{**} pour $\sigma(X^{**}, X^*)$. Le lemme 3.1 montre que f^{**} est aussi la régularisée s.c.i. de f sur X^{**} pour la topologie (plus fine) $\mathscr{T}_1$.

Démonstration du lemme 3.1. On note $K = \mathrm{dom} f$, K' la fermeture de K dans X et $\bar{K}$ la fermeture de K dans X^{**} pour $\sigma(X^{**}, X^*)$. Soit $x^{**} \in X^{**}$. Si $f^{**}(x^{**}) = +\infty$, la conclusion du lemme suit de ce que pour $\mathscr{T}_1$, X est dense dans X^{**} et f^{**} est s.c.i. Supposons donc $f^{**}(x^{**})$ fini, d'où $x^{**} \in \bar{K}$.

On commence par prouver que pour chaque $\epsilon > 0$, il existe une suite généralisée $\{x_i; i \in I\}$ dans X telle que

$$\begin{array}{cccc} x_i \to x^{**} & \text{pour} & \sigma(X^{**}, X^*), & \\ \| x_i \| \leqslant \| x^{**} \| + \epsilon, & \forall i \in I & \text{et} & f(x_i) \to f^{**}(x^{**}). \end{array} \tag{3.2}$$

Tout d'abord il existe $x \in K$ avec $\| x \| < \| x^{**} \| + \epsilon$. En effet, comme

$x^{**} \in \bar{K}$, un tel x existe si $\inf_{y \in K} \| y \|$ qui vaut $\inf_{y \in K'} \| y \|$ est égal à $\inf_{y^{**} \in \bar{K}} \| y^{**} \|$, c'est-à-dire si

$$\inf_{y \in X} g(y) = \inf_{y^{**} \in X^{**}} h(y^{**})$$

où

$$g(y) = \| y \| + \psi_{K'}(y) \qquad \text{et} \qquad h(y^{**}) = \| y^{**} \| + \psi_{\bar{K}}(y^{**}),$$

$\psi_{K'}$ (resp. $\psi_{\bar{K}}$) étant la fonction indicatrice de K' dans X (resp. $\bar{K}$ dans X^{**})[1]; mais cette égalité est satisfaite puisqu'en appliquant le lemme 1.1, on trouve $g^{**} = h$. Désignons par B (resp. $\bar{B}$) la boule dans X (resp. X^{**}) de centre 0 et de rayon $\| x^{**} \| + \epsilon$, et calculons $(f + \psi_B)^{**}$. Puisqu'il existe $x \in K$ avec $\| x \| < \| x^{**} \| + \epsilon$, on peut appliquer le lemme 1.1, ce qui donne $(f + \psi_B)^{**} = f^{**} + \psi_{\bar{B}}$. En particulier

$$f^{**}(x^{**}) = (f + \psi_B)^{**}(x^{**}).$$

Comme $(f + \psi_B)^{**}$ est la régularisée s.c.i. de $(f + \psi_B)$ sur X^{**} pour $\sigma(X^{**}, X^*)$, on déduit de cette égalité l'existence d'une suite généralisée dans X vérifiant (3.2).

On considère maintenant sur X^{**} la topologie la moins fine rendant continues les applications

$$\begin{aligned} &X^{**} \to R : y^{**} \mapsto \langle y^{**}, y^* \rangle, \qquad \forall y^* \in X^*, \\ &X^{**} \to R : y^{**} \mapsto \| y^{**} \|, \\ &X^{**} \to]-\infty, +\infty] : y^{**} \mapsto f^{**}(y^{**}). \end{aligned}$$

La semi-continuité inférieure de la norme sur X^{**} pour $\sigma(X^{**}, X^*)$ et (3.2) impliquent que tout voisinage V de x^{**} pour cette topologie contient un point x_V de X. La suite généralisée $\{x_V; V \text{ voisinage de } x^{**}\}$ répond alors aux conditions du lemme. Q.E.D.

Démonstration du Théorème 3.1. Puisque $(\partial f^*)^{-1} : X^{**} \to X^*$ est monotone maximal, il suffit de prouver que $\overline{\partial f}$, la fermeture de ∂f pour $\mathscr{T}_2$, coïncide avec $(\partial f^*)^{-1}$.

On vérifie aisément que $\operatorname{gr} \overline{\partial f} \subset \operatorname{gr} (\partial f^*)^{-1}$. En effet, si la suite généralisée $\{(x_i, x_i^*); i \in I\}$ d'éléments de $\operatorname{gr} \partial f$ converge pour $\mathscr{T}_2$ vers (x^{**}, x^*), on a

$$f(x_i) + f^*(x_i^*) = \langle x_i, x_i^* \rangle, \qquad \forall i \in I,$$

d'où

$$f^{**}(x^{**}) + f^*(x^*) \leqslant \liminf (f(x_i) + f^*(x_i^*)) = \langle x^{**}, x^* \rangle,$$

ce qui montre que $x^{**} \in \partial f^*(x^*)$.

[1] $\psi_{K'}(x) = 0$ si $x \in K'$, $+\infty$ si $x \notin K'$.

Inversément, soit $x^{**} \in \partial f^*(x^*)$. Considérons une suite généralisée $\{x_i; i \in I\}$ vérifiant la condition (3.1) du lemme 3.1 et posons

$$\epsilon_i = f(x_i) + f^*(x^*) - \langle x_i, x^* \rangle \geqslant 0.$$

Pour chaque $i \in I$, $x^* \in \partial_{\epsilon_i} f(x_i)$, d'où d'après le lemme 1.2, il existe $y_i \in X$ et $y_i^* \in X^*$ satisfaisant

$$y_i^* \in \partial f(y_i), \qquad \| y_i - x_i \| \leqslant \sqrt{\epsilon_i}, \qquad \| y_i^* - x^* \| \leqslant \sqrt{\epsilon_i}.$$

D'autre part $\epsilon_i \to 0$ car $\epsilon_i \to f^{**}(x^{**}) + f^*(x^*) - \langle x^{**}, x^* \rangle$ qui est nul puisque $x^{**} \in \partial f^*(x^*)$. On en déduit que la suite généralisée $\{(y_i, y_i^*); i \in I\}$ d'éléments de gr ∂f converge vers (x^{**}, x^*) pour $\mathscr{T}_2$. Par conséquent

$$\mathrm{gr}(\partial f^*)^{-1} \subset \mathrm{gr}\, \overline{\partial f}.$$

Q.E.D.

PROPOSITION 3.1. *Soit $S : X^* \to X$ un opérateur monotone hémicontinu de domaine $D(S) = X^*$. Alors S est monotone de type dense. De plus $\bar{S} = S$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que $S : X^* \to X^{**}$ est monotone maximal, ce qui résulte d'un argument bien connu basé sur l'hémicontinuité de S (cf. par example [7]). Q.E.D.

On rencontre des opérateurs vérifiant les hypothèses de la proposition 3.1 (avec X non réflexif) dans l'étude de certaines inéquations variationnelles elliptiques [4], ainsi que dans l'étude des problèmes aux limites elliptiques pour des équations dont les coefficients ont une croissance non polynomiale [6].

Remarque. Les résultats précédents suggèrent la question suivante: tout sous-ensemble monotone maximal de $X \times X^*$ est-il de type dense ?[2]

Rappelons qu'une forme d'appui d'un ensemble convexe fermé C de X est un élément $x^* \in X^*$ tel que $\langle \cdot, x^* \rangle$ atteigne son supremum sur C. Cela revient à dire que x^* appartient à l'image du sous-différentiel de la fonction indicatrice de C.

COROLLAIRE 3.1. *Soient C un ensemble convexe fermé de X et $\bar{C}$ sa fermeture dans X^{**} pour $\sigma(X^{**}, X^*)$. Soit x^* une forme d'appui de $\bar{C}$ en x^{**}. Il*

[2] *Added in proof.* Il est maintenant connu que tous les opérateurs monotones maximaux ne sont pas de type dense. Notons aussi que les opérateurs monotones maximaux considérés par Rockafellar 29 en liaison avec des problèmes de minimax sont de type dense.

existe une suite généralisée $\{(x_i, x_i^*); i \in I\}$, *avec* x_i^* *forme d'appui de C en* x_i, *qui converge vers* (x^{**}, x^*) *pour* $\mathscr{T}_2$.

Démonstration. Appliquer le théorème 3.1 en prenant pour f la fonction indicatrice de C. Q.E.D.

COROLLAIRE 3.2. *Soit* C *un ensemble convexe de* X. *Les fermetures de* C *dans* X^{**} *pour* $\sigma(X^{**}, X^*)$ *et pour* $\mathscr{T}_1$ *coïncident.*

4. RÉSOLVANTE APPROCHÉE

Lorsque X est *réflexif*, la *résolvante* $(\lambda J + T)^{-1}$, $\lambda > 0$, d'un opérateur monotone maximal $T: X \to X^*$ est partout définie (cf. [7, 17, 18, 20] dans des cas particuliers, [9, 10] dans le cas général). La proposition suivante montre qu'en général ce résultat n'est plus vrai sans l'hypothèse de réflexivité.

PROPOSITION 4.1. *L'application de dualité* $J: X \to X^*$ *est surjective si et seulement si* X *est réflexif.*

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de James [12] qui dit qu'un espace de Banach Y est réflexif si et seulement si toute forme linéaire continue sur Y atteint son supremum sur la boule unité de Y. Q.E.D.

Par contre, on vérifie facilement que l'application de dualité approchée $J_\epsilon: X \to X^*$ est toujours surjective. Ceci suggère de définir dans un espace de Banach *non* (*nécessairement*) *réflexif* la notion de *résolvante approchée* $(\lambda J_\epsilon + T)^{-1}$.

THÉORÈME 4.1. *Soit* $T: X \to X^*$ *un opérateur monotone de type dense. Alors* $R(\lambda J_\epsilon + T) = X^*$, $\forall\lambda > 0$, $\forall\epsilon > 0$.

La démonstration de ce théorème utilise le lemme de prolongement de Debrunner et Flor [11] tel qu'il a été généralisé par Browder [8] (voir aussi [19]).

LEMME 4.1 (cf. [8]). *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes séparés mis en dualité par un produit scalaire* $\langle , \rangle$ *que l'on suppose continu sur les produits de compacts. Soient* K *un convexe compact de* E *et* G *un sous-ensemble monotone de* $K \times F$. *Soit* $A: K \to F$ *une multi-application semi-continue supérieurement telle que* Ax *soit convexe fermé non vide pour chaque* $x \in K$ *et* $\bigcup_{x \in K} Ax$ *soit contenu dans un convexe compact de* F. *Alors il existe* (x, x^*) *dans le graphe de* A *tel que* $G \cup \{(x, x^*)\}$ *soit encore monotone.*

Démonstration du théorème 4.1. Pour $\lambda > 0$ et $x^* \in X^*$, l'opérateur $x \mapsto 1/\lambda\,(Tx - x^*)$ vérifie les mêmes hypothèses que T. Il suffit donc de montrer que $0 \in R(J_\epsilon + T)$, $\forall \epsilon > 0$.

Soit $\mathscr{F}$ l'ordonné filtrant croissant des sous-espaces F de dimension finie de X. On note i_F l'injection naturelle de F dans X et $i_F{}^*$ l'application duale de X^* sur F^*. Prenons $F \in \mathscr{F}$ et $r > 0$. D'après le lemme 4.1 appliqué aux espaces finidimensionnels F et F^*, au compact convexe $\{x \in F; \| x \| \leqslant r\}$ et aux opérateurs $i_F{}^*Ti_F$ et $-i_F{}^*Ji_F$, il existe $x_{F,r} \in F$ et $x^*_{F,r} \in X^*$ vérifiant

$$\| x_{F,r} \| \leqslant r, \qquad x^*_{F,r} \in Jx_{F,r}$$

et

$$\langle x_{F,r} - y, - x^*_{F,r} - y^* \rangle \geqslant 0$$

pour tout $(y, y^*) \in \operatorname{gr} T$ avec $y \in F$ et $\| y \| \leqslant r$. Par passage à la limite lorsque $r \to +\infty$, on en déduit l'existence de $x_F \in F$ et de $x_F{}^* \in X^*$ vérifiant $x_F{}^* \in Jx_F$ et

$$\langle x_F - y, - x_F{}^* - y^* \rangle \geqslant 0 \tag{4.1}$$

pour tout $(y, y^*) \in \operatorname{gr} T$ avec $y \in F$. La coercivité de J entraîne que x_F et $x_F{}^*$ restent bornés dans X et X^* respectivement lorsque F parcourt $\mathscr{F}$. En prenant une suite généralisée partielle, on peut donc supposer

$$\begin{aligned} x_F &\to x^{**} \in X^{**} \quad &&\text{pour} \quad \sigma(X^{**}, X^*), \\ x_F{}^* &\to x^* \in X^* \quad &&\text{pour} \quad \sigma(X^*, X). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Montrons que $x^{**} \in D(\bar{T})$ et $- x^* \in \bar{T}x^{**}$. Tout d'abord on a

$$\langle x^{**}, x^* \rangle \leqslant \liminf \langle x, x_F{}^* \rangle$$

puisqu'il suit de (4.2) et de $x_F{}^* \in Jx_F = \partial j(x_F)$ que

$$\begin{aligned} \langle x^{**}, x^* \rangle &\leqslant j^{**}(x^{**}) + j^*(x^*) \\ &\leqslant \liminf((jx_F) + j^*(x_F{}^*)) = \liminf \langle x_F , x_F{}^* \rangle. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\langle x^{**} - y, - x^* - y^* \rangle \geqslant 0, \qquad \forall (y, y^*) \in \operatorname{gr} T$$

car (4.1) et (4.2) entraînent

$$\limsup \langle x_F , x_F{}^* \rangle \leqslant \langle y, y^* \rangle + \langle y, x^* \rangle - \langle x^{**}, y^* \rangle \tag{4.3}$$

pour tout $(y, y^*) \in \operatorname{gr} T$. Comme T est monotone de type dense, on conclut au moyen du lemme 2.1 que $- x^* \in \bar{T}x^{**}$.

Montrons maintenant que $x^{**} \in \partial j^*(x^*)$. Tout d'abord on a

$$\limsup \langle x_F, x_F^* \rangle \leqslant \langle x^{**}, x^* \rangle.$$

En effet, il suit de (4.3) que

$$\limsup \langle x_F, x_F^* \rangle \leqslant \langle y^{**}, y^* \rangle + \langle y^{**}, x^* \rangle - \langle x^{**}, y^* \rangle$$

pour tout $(y^{**}, y^*) \in \mathrm{gr}\, \bar{T}$; en y remplaçant (y^{**}, y^*) par $(x^{**}, -x^*) \in \mathrm{gr}\, \bar{T}$, on obtient la relation cherchée. On déduit alors de

$$\begin{aligned} \langle x^{**}, x^* \rangle &\leqslant j^{**}(x^{**}) + j^*(x^*) \\ &\leqslant \liminf \langle x_F, x_F^* \rangle \\ &\leqslant \limsup \langle x_F, x_F^* \rangle \leqslant \langle x^{**}, x^* \rangle \end{aligned}$$

que $x^{**} \in \partial j^*(x^*)$.

Puisque $-x^* \in \bar{T}x^{**}$, il existe une suite généralisée $\{(x_i, -x_i^*); i \in I\}$ d'éléments de gr T qui converge pour $\mathscr{T}_2$ vers $(x^{**}, -x^*)$. Or les fonctions j^{**} et j^* sont continues sur X^{**}, $\mathscr{T}_1$ et X^*, $\| \ \|$ respectivement. D'où

$$0 \leqslant j(x_i) + j^*(x_i^*) - \langle x_i, x_i^* \rangle \to j^{**}(x^{**}) + j^*(x^*) - \langle x^{**}, x^* \rangle$$

qui est nul car $x^{**} \in \partial j^*(x^*)$. Étant donné $\epsilon > 0$, il existe donc un indice i_0 tel que

$$0 \leqslant j(x_{i_0}) + j^*(x_{i_0}^*) - \langle x_{i_0}, x_{i_0}^* \rangle \leqslant \epsilon,$$

ce qui montre que $x_{i_0}^* \in J_\epsilon x_{i_0}$. Comme par ailleurs $-x_{i_0}^* \in Tx_{i_0}$, on obtient $0 \in J_\epsilon x_{i_0} + Tx_{i_0}$. Q.E.D.

COROLLAIRE 4.1. *Soit f une fonction convexe propre s.c.i. sur X. Alors*

$$R(\lambda J_\epsilon + \partial f) = X^*, \qquad \forall \lambda > 0, \qquad \forall \epsilon > 0.$$

5. PROPRIÉTÉS DE LA RÉSOLVANTE APPROCHÉE

Les propositions suivantes fournissent des indications sur l'ensemble des solutions x de l'équation $x^* \in (\lambda J_\epsilon + T)x$ et sur son comportement lorsque $\epsilon \downarrow 0$.

PROPOSITION 5.1. *Soit $T: X \to X^*$ un opérateur monotone. L'ensemble des solutions x de $x^* \in (\lambda J_\epsilon + T)x$ est borné dans X, et cette majoration est uniforme lorsque x^*, λ et ϵ varient tout en vérifiant $\| x^* \| \leqslant M$, $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$ et $\epsilon \leqslant \epsilon_0$.*

Démonstration. Soit $x \in (\lambda J_\epsilon + T)^{-1} x^*$ c'est-à-dire $x^* = \lambda y^* + z^*$ avec $y^* \in J_\epsilon x$ et $z^* \in Tx$. Fixons $(u, u^*) \in \operatorname{gr} T$. La monotonie de T implique

$$\langle x, y^* \rangle \leqslant \frac{1}{\lambda} \langle x - u, x^* - u^* \rangle + \langle u, y^* \rangle.$$

Or $\langle x, y^* \rangle \geqslant \| x \| \| y^* \| - \epsilon$ car $y^* \in J_\epsilon x$. Par conséquent lorsque x^*, λ et ϵ varient suivant l'énoncé, on a

$$\| x \| \| y^* \| \leqslant c_1 \| x \| + c_2 \| y^* \| + c_3$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes positives. Comme $y^* \in J_{\epsilon_0} x$, $\| x \| \to +\infty$ si et seulement si $\| y^* \| \to +\infty$ (lemme 1.3). On en déduit que x reste borné dans X. Q.E.D.

PROPOSITION 5.2. *Soit $T : X \to X^*$ un opérateur monotone maximal. Soient $x^* \in X^*$, $\lambda > 0$ et $\epsilon > 0$. L'ensemble des solutions x de $x^* \in (\lambda J_\epsilon + T)\, x$ est fermé pour la norme de X.*

Démonstration. Soit $\{x_i ; i \in I\}$ une suite généralisée bornée d'éléments de $(\lambda J_\epsilon + T)^{-1} x^*$ qui converge en norme vers x. Posons $x^* = \lambda y_i^* + z_i^*$ avec $y_i^* \in J_\epsilon x_i$ et $z_i^* \in T x_i$. D'après le lemme 1.3, y_i^* reste borné dans X^*, d'où en prenant une suite généralisée partielle, on peut supposer que $y_i^* \to y^*$ pour $\sigma(X^*, X)$. Comme J_ϵ est fermé de X, $\| \; \|$ dans X^*, $\sigma(X^*, X)$, on a $y^* \in J_\epsilon x$. En passant à la limite dans les inégalités qui expriment que T est monotone maximal, on déduit de $x^* - \lambda y_i^* \in T x_i$ que $x^* - \lambda y^* \in Tx$. Par conséquent $x \in (\lambda J_\epsilon + T)^{-1} x^*$. Q.E.D.

Remarque. En général l'ensemble $(\lambda J_\epsilon + T)^{-1} x^*$ n'est pas convexe. En effet, [28] construit sur $X = L^2(0, 1)$ une fonction f convexe propre s.c.i. telle que $D(\partial f)$ ne soit pas convexe. Soient alors x et $y \in D(\partial f)$ avec

$$\frac{x + y}{2} \notin D(\partial f).$$

En choisissant ϵ suffisamment grand, on a

$$x \text{ et } y \in (J_\epsilon + \partial f)^{-1} 0 = \{ z \in X ; -\partial f(z) \cap J_\epsilon z \neq \text{vide} \},$$

mais il est évident que

$$\frac{x + y}{2} \notin (J_\epsilon + f)^{-1} 0.$$

En passant à la limite lorsque $\epsilon \downarrow 0$ dans la résolvante approchée, on trouve le résultat suivant où $\bar{J}$ désigne la fermeture de J pour $\mathscr{T}_2$, c'est-à-dire (théorème 3.1) l'inverse de l'application de dualité ∂j^*.

Proposition 5.3. *Soit $T : X \to X^*$ un opérateur monotone de type dense. Soient $x^* \in X^*$ et $\lambda > 0$. Pour $\epsilon > 0$ prenons x_ϵ dans $(\lambda J_\epsilon + T)^{-1} x^*$. Alors x_ϵ reste borné dans X lorsque $\epsilon \downarrow 0$. De plus il existe une suite généralisée partielle telle que $x_\epsilon \to x^{**}$ pour $\sigma(X^{**}, X^*)$ et $\| x_\epsilon \| \to \| x^{**} \|$, x^{**} satisfaisant $x^{**} \in (\lambda \bar{J} + \bar{T})^{-1} x^*$; si X^{**} est strictement convexe, ce qui précède a lieu lorsque $\epsilon \downarrow 0$, sans prendre de suite généralisée partielle.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas $x^* = 0$ et $\lambda = 1$. On a donc $x_\epsilon \in (J_\epsilon + T)^{-1} 0$ c'est-à-dire $0 = y_\epsilon^* - y_\epsilon^*$ avec $y_\epsilon^* \in J_\epsilon x_\epsilon$ et $- y_\epsilon^* \in T x_\epsilon$. Puisque x_ϵ reste borné dans X lorsque $\epsilon \downarrow 0$ (proposition 5.1), y_ϵ^* reste borné dans X^* (lemme 1.3), d'où en prenant une suite généralisée partielle, on peut supposer

$$\begin{aligned} &x_\epsilon \to x^{**} \in X^{**} \qquad \text{pour} \qquad \sigma(X^{**}, X^*), \\ &y_\epsilon^* \to y^* \in X^* \qquad \text{pour} \qquad \sigma(X^*, X). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Montrons que $x^{**} \in D(\bar{T})$, $- y^* \in \bar{T} x^{**}$ et $y^* \in \bar{J} x^{**}$. Tout d'abord on a

$$\langle x^{**}, y^* \rangle \leqslant \liminf \langle x_\epsilon , y_\epsilon^* \rangle$$

puisqu'il suit de (5.1) et de $y_\epsilon^* \in J_\epsilon x_\epsilon = \partial_\epsilon j(x_\epsilon)$ que

$$\begin{aligned} \langle x^{**}, y^* \rangle &\leqslant j^{**}(x^{**}) + j^*(y^*) \\ &\leqslant \liminf (j(x_\epsilon) + j^*(y_\epsilon^*)) \\ &\leqslant \liminf (\langle x_\epsilon , y_\epsilon^* \rangle + \epsilon) = \liminf \langle x_\epsilon , y_\epsilon^* \rangle. \end{aligned}$$

On en déduit, comme dans la démonstration du théorème 4.1, que $- y^* \in \bar{T} x^{**}$. On prouve alors, comme précédemment, que

$$\limsup \langle x_\epsilon , y_\epsilon^* \rangle \leqslant \langle x^{**}, y^* \rangle$$

et que $y^* \in \bar{J} x^{**}$.

En prenant éventuellement une nouvelle suite généralisée partielle, on a $\| x_\epsilon \| \to \| x^{**} \|$. En effet,

$$\begin{aligned} j^{**}(x^{**}) + j^*(y^*) \geqslant \langle x^{**}, y^* \rangle &= \lim \langle x_\epsilon , y_\epsilon^* \rangle \\ &\geqslant \liminf (j(x_\epsilon) + j^*(y_\epsilon^*) - \epsilon) \\ &\geqslant \liminf j(x_\epsilon) + j^*(y^*), \end{aligned}$$

d'où

$$j^{**}(x^{**}) \geqslant \liminf j(x_\epsilon).$$

Vu la forme explicite de j^{**}, on en déduit $\| x^{**} \| \geqslant \liminf \| x_\epsilon \|$, ce qui entraîne que $\| x^{**} \| = \liminf \| x_\epsilon \|$, d'où l'énoncé.

Enfin si X^{**} est strictement convexe, l'opérateur $\bar{J} + \bar{T}$ est strictement monotone car $\bar{J}$ l'est. Il existe donc au plus un x^{**} solution de $0 \in (\bar{J} + \bar{T})\, x^{**}$, ce qui achève la démonstration. Q.E.D.

COROLLAIRE 5.1. *Soit $T : X \to X^*$ un opérateur monotone de type dense. Alors $\lambda \bar{J} + \bar{T} : X^{**} \to X^*$ est surjectif* $\forall \lambda > 0$.

COROLLAIRE 5.2 (cf. [9, 10]). *On suppose X réflexif. Soit $T : X \to X^*$ un opérateur monotone maximal. Alors $R(\lambda J + T) = X^*$, $\forall \lambda > 0$.*

6. CAS DES OPÉRATEURS DE X^* DANS X

On peut aussi considérer la résolvante approchée d'un opérateur $S : X^* \to X$. Désignons par S_x l'opérateur translaté de S par $x \in X$:

$$S_x : X^* \to X : y^* \mapsto Sy^* + x,$$

et par G_ϵ l'opérateur inverse de J_ϵ de domaine $D(G_\epsilon) = X^*$. Le résultat suivant se démontre de la même façon que le théorème 4.1.

THÉORÈME 6.1. *Soit $S : X^* \to X$ un opérateur monotone tel que S_x soit de type dense pour chaque $x \in X$. Alors $R(\lambda G_\epsilon + S) = X$, $\forall \lambda > 0$, $\forall \epsilon > 0$.*

COROLLAIRE 6.1. *Soit $S : X^* \to X$ un opérateur monotone hémicontinu de domaine $D(S) = X^*$. Alors $R(\lambda G_\epsilon + S) = X$, $\forall \lambda > 0$, $\forall \epsilon > 0$.*

COROLLAIRE 6.2. *Soit f une fonction convexe propre s.c.i. sur X. Alors $R(\lambda G_\epsilon + (\partial f)^{-1}) = X$, $\forall \lambda > 0$, $\forall \epsilon > 0$.*

Démonstration. Poser $S = (\partial f)^{-1}$ et appliquer le théorème 3.1 à $S_x = (\partial f_x)^{-1}$ où f_x est défini par $f_x(y) = f(y - x)$. Q.E.D.

7. PROPRIÉTÉS DE CONVEXITÉ

Dans [12] on a caractérisé au moyen de la résolvante les éléments de l'image d'un opérateur monotone maximal d'un espace de Banach réflexif dans son dual. On étend ici ce résultat au cas non réflexif en utilisant la résolvante approchée.

PROPOSITION 7.1. *Soit $T : X \to X^*$ un opérateur monotone de type dense. Soit $x^* \in X^*$. Fixons $\epsilon > 0$ et prenons, pour $\lambda > 0$, $x_\lambda \in (\lambda J_\epsilon + T)^{-1} x^*$. Alors $x^* \in R(\bar{T})$ si et seulement si x_λ reste borné dans X lorsque $\lambda \downarrow 0$.*

Démonstration. On écrit $x^* = \lambda y_\lambda{}^* + z_\lambda{}^*$ avec $y_\lambda{}^* \in J_\epsilon x_\lambda$ et $z_\lambda{}^* \in Tx_\lambda$.

Supposons d'abord que $x^* \in R(\bar{T}) : x^* \in \bar{T}x^{**}$. La monotonie de $\bar{T}$ implique

$$\langle x^{**}, y_\lambda{}^*\rangle \geqslant \langle x_\lambda , y_\lambda{}^*\rangle,$$

ce qui entraîne $j^{**}(x^{**}) \geqslant j(x_\lambda) - \epsilon$. On en déduit que x_λ reste borné dans X indépendamment de $\lambda > 0$.

Inversément, si x_λ reste borné dans X lorsque $\lambda \downarrow 0$, on peut supposer, en prenant une suite généralisée partielle, que $x_\lambda \to x^{**}$ pour $\sigma(X^{**}, X^*)$. La monotonie de T implique

$$\langle x_\lambda - u, (x^* - \lambda y_\lambda{}^*) - u^*\rangle \geqslant 0, \qquad \forall (u, u^*) \in \operatorname{gr} T,$$

d'où à la limite, puisque $y_\lambda{}^*$ reste borné dans X^* (lemme 1.3),

$$\langle x^{**} - u, x^* - u^*\rangle \geqslant 0, \qquad \forall (u, u^*) \in \operatorname{gr} T,$$

ce qui, d'après le lemme 2.1, entraîne $x^* \in \bar{T}x^{**}$. Q.E.D.

Appelons simplexe l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points et désignons par conv C l'enveloppe convexe de C. Pour simplifier, on va utiliser ci-dessous la jauge particulière $\phi(r) = r$; donc $J_\epsilon = \partial_\epsilon j$ où $j(x) = \frac{1}{2}\| x \|^2$, et $| \| x \| - \| x^* \| | \leqslant \sqrt{2\epsilon}$ lorsque $x^* \in J_\epsilon x$. La proposition suivante, qu'il est intéressant de comparer à la précédente, généralise aussi un résultat de [12].

PROPOSITION 7.2. *Soit $T : X \to X^*$ un opérateur monotone de type dense. Soit $x^* \in X^*$. Fixons $\epsilon > 0$ et prenons, pour $\lambda > 0$, $x_\lambda \in (\lambda J_\epsilon + T)^{-1} x^*$. Si $x^* \in$ conv $R(\bar{T})$, alors $\sqrt{\lambda}\, x_\lambda$ reste borné dans X lorsque $\lambda \downarrow 0$, et cette majoration est uniforme lorsque x^* parcourt un simplexe de* conv $R(\bar{T})$.

Démonstration. Considérons x^* dans un simplexe fixé S de conv $R(\bar{T})$. S est contenu dans un simplexe S' de la forme

$$S' = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i{}^*; \mu_i \geqslant 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{N} \mu_i = 1 \right\}$$

où $x_i{}^* \in R(\bar{T})$. Le théorème 4.1 permet d'écrire $x^* = \lambda y_\lambda{}^* + z_\lambda{}^*$ avec $y_\lambda{}^* \in J_\epsilon x_\lambda$ et $z_\lambda{}^* \in Tx_\lambda$ ainsi que $x_i{}^* = \lambda y^*_{i,\lambda} + z^*_{i,\lambda}$ avec $y^*_{i,\lambda} \in J_\epsilon x_{i,\lambda}$ et $z^*_{i,\lambda} \in Tx_{i,\lambda}$. D'après la proposition 7.1, chaque $x_{i,\lambda}$ reste borné dans X lorsque $\lambda \downarrow 0$. Comme T est monotone, on a, pour chaque $i = 1,..., N$,

$$\langle x_\lambda - x_{i,\lambda} , (x_\lambda{}^* - \lambda y_\lambda{}^*) - (x_i{}^* - \lambda y^*_{i,\lambda})\rangle \geqslant 0,$$

c'est-à-dire, en posant

$$x^* = \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i^*,$$

$$\left\langle x_\lambda - x_{i,\lambda} , (1 - \mu_i)\, x_i^* - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \mu_j x_j^* + \lambda y_\lambda^* - \lambda y_{i,\lambda}^* \right\rangle \leqslant 0.$$

En multipliant la première inégalité ($i = 1$) par μ_1, la deuxième ($i = 2$) par μ_2,... et en additionnant, on obtient

$$\lambda \sum_{i=1}^{N} \mu_i \langle x_\lambda - x_{i,\lambda} , y_\lambda^* - y_{i,\lambda}^* \rangle \leqslant c,$$

d'où

$$\lambda \langle x_\lambda , y_\lambda^* \rangle \leqslant c_1 + \lambda c_2 + \lambda c_3 \| x_\lambda \| + \lambda c_4 \| y_\lambda^* \|;$$

ci-dessus les constantes c, c_1,..., c_4 dépendent de x_1^*,..., x_N^* (c'est-à-dire de S') mais ne dépendent ni de $x^* \in S'$ ni de $\lambda > 0$. Comme $y_\lambda^* \in J_\epsilon x_\lambda$ avec $J_\epsilon = \partial_\epsilon(\frac{1}{2} \| \ \|^2)$, on en déduit

$$\lambda \| x_\lambda \|^2 \leqslant c_5 + \lambda c_6 + \lambda c_7 \| x_\lambda \|$$

avec de nouvelles constantes c_5, c_6 et c_7. Il en résulte que $\sqrt{\lambda} \| x_\lambda \|$ reste borné lorsque $\lambda \downarrow 0$, uniformément lorsque x^* parcourt S'. Q.E.D.

THÉORÈME 7.1. *Soit $T : X \to X^*$ un opérateur monotone de type dense. Alors* cl $R(T)$ *est convexe* (cl *désigne la fermeture pour la norme*).

Démonstration. Il suffit de prouver que conv $R(T) \subset$ cl $R(T)$. Soit $x^* \in$ conv $R(T)$. Fixons $\epsilon > 0$ et écrivons (théorème 4.1) $x^* = \lambda y_\lambda^* + z_\lambda^*$ avec $y_\lambda^* \in J_\epsilon x_\lambda$ et $z_\lambda^* \in T x_\lambda$ en utilisant la jauge particulière $\phi(r) = r$. D'après la proposition précédente, $\sqrt{\lambda}\, x_\lambda$ reste borné dans X lorsque $\lambda \downarrow 0$, d'où $\sqrt{\lambda} y_\lambda^*$ reste borné dans X^* lorsque $\lambda \downarrow 0$. On en déduit que

$$x^* - z_\lambda^* = \sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda} y_\lambda^*)$$

converge en norme vers zéro lorsque $\lambda \downarrow 0$, ce qui montre que $x^* \in$ cl $R(T)$. Q.E.D.

COROLLAIRE 7.1 (cf. [27]). *On suppose X réflexif. Soit $T : X \to X^*$ un opérateur monotone maximal. Alors* cl $D(T)$ *et* cl $R(T)$ *sont convexes.*

On peut étudier de la même façon un opérateur $S : X^* \to X$ et démontrer les résultats suivants (la proposition 7.4 suppose que l'on utilise la jauge particulière $\phi(r) = r$).

PROPOSITION 7.3. *Soit $S : X^* \to X$ un opérateur monotone maximal tel que S_x soit de type dense pour chaque $x \in X$. Soit $x \in X$. Fixons $\epsilon > 0$ et prenons, pour $\lambda > 0$, $x_\lambda^* \in (\lambda G_\epsilon + S)^{-1} x$. Alors $x \in R(S)$ si et seulement si x_λ^* reste borné dans X^* lorsque $\lambda \downarrow 0$.*

PROPOSITION 7.4. *Soit $S : X^* \to X$ un opérateur monotone tel que S_x soit de type dense pour chaque $x \in X$. Soit $x \in X$. Fixons $\epsilon > 0$ et prenons, pour $\lambda > 0$, $x_\lambda^* \in (\lambda G_\epsilon + S)^{-1} x$. Si $x \in$* conv *$R(S)$, alors $\sqrt{\lambda}\, x_\lambda^*$ reste borné dans X^* lorsque $\lambda \downarrow 0$, et cette majoration est uniforme lorsque x parcourt un simplexe de* conv *$R(S)$.*

THÉORÈME 7.2. *Soit $S : X^* \to X$ un opérateur monotone tel que S_x soit de type dense pour chaque $x \in X$. Alors* cl *$D(S)$ et* cl *$R(S)$ sont convexes.*

COROLLAIRE 7.2. *Soit $S : X^* \to X$ un opérateur monotone hémicontinu de domaine $D(S) = X^*$. Alors* cl *$R(S)$ est convexe.*

COROLLAIRE 7.3 (cf. [5]). *Soit f une fonction convexe propre s.c.i. sur X. Alors* cl *$D(\partial f)$ et* cl *$R(\partial f)$ sont convexes.*

8. PROPRIÉTÉS DE SURJECTIVITÉ

Lorsque X est réflexif, un opérateur monotone maximal $T : X \to X^*$ est surjectif s'il est coercif (cf. [7] dans un cas particulier, [9, 10] dans le cas général). La proposition 4.1 montre que ce résultat n'est plus vrai sans l'hypothèse de réflexivité.

THÉORÈME 8.1. *Soit $T : X \to X^*$ un opérateur monotone de type dense. On suppose T coercif c'est-à-dire, pour un certain $x_0 \in X$,*

$$\frac{\langle x - x_0 \,,\, x^* \rangle}{\| x \|} \to +\infty$$

lorsque $x \in D(T)$, $x^* \in Tx$ et $\| x \| \to +\infty$. Alors $R(T)$ est dense dans X^* pour la norme de X^*. De plus $R(\bar{T}) = X^*$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $R(\bar{T}) = X^*$, la densité de $R(T)$ résultant alors de la définition de $\bar{T}$. Soit $x^* \in X^*$. Fixons $\epsilon > 0$. D'après le théorème 4.1, on peut écrire $x^* = \lambda y_\lambda^* + z_\lambda^*$ avec $y_\lambda^* \in J_\epsilon x_\lambda$ et $z_\lambda^* \in Tx_\lambda$. On a

$$\begin{aligned}\langle x_\lambda - x_0, x^*\rangle &= \lambda\langle x_\lambda, y_\lambda^*\rangle - \lambda\langle x_0, y_\lambda^*\rangle + \langle x_\lambda - x_0, z_\lambda^*\rangle \\ &\geqslant \lambda j(x_\lambda) + \lambda j^*(y_\lambda^*) - \lambda\epsilon - \lambda j(x_0) \\ &\quad - \lambda j^*(y_\lambda^*) + \langle x_\lambda - x_0, z_\lambda^*\rangle \\ &\geqslant \langle x_\lambda - x_0, z_\lambda^*\rangle - \lambda\epsilon - \lambda j(x_0),\end{aligned}$$

ce qui, joint à la coercivité de T, entraîne que x_λ reste borné dans X lorsque $\lambda \downarrow 0$. D'après la proposition 7.1, $x^* \in R(\bar{T})$. Q.E.D.

Corollaire 8.1 (cf. [9, 10]). *On suppose X réflexif. Soit $T : X \to X^*$ un opérateur monotone maximal coercif. Alors $R(T) = X^*$.*

Un énoncé plus précis que ce corollaire a été obtenu par Rockafellar [25] qui donne une condition nécessaire et suffisante pour que, X étant réflexif, l'opérateur monotone maximal $T : X \to X^*$ soit surjectif (voir au N° 9 une extension du résultat de [25] au cas non réflexif).

Corollaire 8.2. *Soit f une fonction convexe propre s.c.i. sur X. On suppose que $f(x)/\|x\| \to +\infty$ lorsque $x \in \operatorname{dom} f$ et $\|x\| \to +\infty$. Alors $R(\partial f)$ est dense dans X^* pour la norme de X^*. De plus $D(\partial f^*) = X^*$.*

Démonstration. L'opérateur $\partial f : X \to X^*$ étant monotone de type dense (théorème 3.1), il suffit de vérifier qu'il est coercif. Soit $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Lorsque $x^* \in \partial f(x)$, on a

$$\langle x - x_0, x^*\rangle \geqslant f(x) - f(x_0),$$

ce qui entraîne que ∂f est coercif. Q.E.D.

Corollaire 8.3. *L'image de X par l'application de dualité J est dense dans X^* pour la norme de X^*.*

Corollaire 8.4 (cf. [3]). *Soit C un ensemble convexe fermé borné de X. L'ensemble des formes d'appui de C est dense dans X^* pour la norme de X^*.*

La proposition suivante, forme locale du théorème 8.1, a été donnée dans [26] dans le cas particulier où X est réflexif et T monotone maximal.

Proposition 8.1. *Soit $T : X \to X^*$ un opérateur monotone de type dense. Soit $x_0^* \in X^*$. On suppose qu'il existe $x_0 \in X$ et $\alpha > 0$ tels que $\|x\| > \alpha$. $x \in D(T)$ et $x^* \in Tx$ impliquent $\langle x - x_0, x^* - x_0^*\rangle \geqslant 0$. Alors $x_0^* \in \operatorname{cl} R(T)$. De plus $x_0^* \in R(\bar{T})$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $x_0{}^* \in R(\bar{T})$. Par translation on se ramène au cas $x_0{}^* = 0$. Fixons $\epsilon > 0$. Pour rappel, $J_\epsilon = \partial_\epsilon j$ où $j(x) = \Phi(\| x \|)$. Choisissons β suffisamment grand pour que $\beta \geqslant \alpha$ et $\Phi(\beta) - \epsilon - j(x_0) > 0$. D'après le théorème 4.1, on peut écrire $0 = \lambda y_\lambda{}^* + z_\lambda{}^*$ avec $y_\lambda{}^* \in J_\epsilon x_\lambda$ et $z_\lambda{}^* \in Tx_\lambda$. Si $\| x_\lambda \| > \beta$, alors par hypothèse, $\langle x_\lambda - x_0 , z_\lambda{}^* \rangle \geqslant 0$, c'est-à-dire $\langle x_\lambda - x_0 , y_\lambda{}^* \rangle \leqslant 0$. Mais par ailleurs $\| x_\lambda \| > \beta$ entraîne

$$\begin{aligned} \langle x_\lambda - x_0 , y_\lambda{}^* \rangle &= \langle x_\lambda , y_\lambda{}^* \rangle - \langle x_0 , y_\lambda{}^* \rangle \\ &\geqslant j(x_\lambda) + j^*(y_\lambda{}^*) - \epsilon - j(x_0) - j^*(y_\lambda{}^*) \\ &\geqslant \Phi(\beta) - \epsilon - j(x_0) > 0. \end{aligned}$$

D'où $\| x_\lambda \| \leqslant \beta$ pour tout $\lambda > 0$. En particulier x_λ reste borné dans X lorsque $\lambda \downarrow 0$, ce qui entraîne (proposition 7.1) que $0 \in R(\bar{T})$. Q.E.D.

9. Opérateurs monotones localement bornés

Considérons pour un opérateur $T : X \to X^*$ la condition

$$\text{int conv } D(T) \neq \text{vide} \tag{9.1}$$

(int désigne l'intérieur pour la norme). Les opérateurs monotones vérifiant (9.1) ont été étudiés par Rockafellar [25] qui a prouvé entre autres le résultat suivant où T est appelé localement borné en x s'il existe un voisinage (pour la norme) V de x tel que $TV = \bigcup_{y \in V} Ty$ soit borné dans X.

Proposition 9.1 (cf. [25]). *Si l'opérateur monotone maximal $T : X \to X^*$ vérifie* (9.1), *alors T est localement borné en $x \in \text{cl } D(T)$ si et seulement si $x \in \text{int } D(T)$.*

De plus, [25] montre que lorsque X est réflexif, la condition (9.1) est satisfaite par l'opérateur monotone maximal $T : X \to X^*$ s'il existe un point de cl $D(T)$ où T est localement borné. On va étendre ici ce résultat au cas non réflexif.

Désignons par ${}_xT$ l'opérateur translaté de T par $x \in X$:

$${}_xT : X \to X^* : y \mapsto T(y + x).$$

Proposition 9.2. *Soit $T : X \to X^*$ un opérateur monotone maximal tel que ${}_xT$ soit de type dense pour chaque $x \in X$. Si T est localement borné en un point x de* cl $D(T)$, *alors $x \in \text{int } D(T)$ (d'où* (9.1) *est satisfait).*

Démonstration. Lorsque X est réflexif, cette proposition est prouvée dans [25]. Mais la réflexivité n'intervient effectivement dans la démonstration de [25] que par l'intermédiaire de [27], pour montrer que cl $D(T)$ est convexe. Ici cette convexité est assurée par le théorème 7.2. Q.E.D.

Au moyen des propositions 9.1 et 9.2, on peut établir diverses propriétés de l'image d'un opérateur $S : X^* \to X$. Les corollaires suivants ont été donnés dans [25] dans le cas particulier où X est réflexif.

COROLLAIRE 9.1. *Soit $S : X^* \to X$ un opérateur monotone maximal tel que S_x soit de type dense pour chaque $x \in X$. Alors $0 \in \operatorname{int} R(S)$ si et seulement si $0 \in \operatorname{cl} R(S)$ et il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $x \in Sx^*$ et $\| x^* \| \geqslant \alpha$ impliquent $\| x \| \geqslant \beta$.*

Démonstration. Posons $T = S^{-1}$. D'après les propositions 9.1 et 9.2, $0 \in \operatorname{int} D(T)$ si et seulement si $0 \in \operatorname{cl} D(T)$ et T est localement borné en 0. Cette dernière condition signifie qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $x^* \in Tx$ et $\| x \| < \beta$ impliquent $\| x^* \| < \alpha$. Q.E.D.

COROLLAIRE 9.2. *Soit $S : X^* \to X$ un opérateur monotone maximal tel que S_x soit de type dense pour chaque $x \in X$. Alors $R(S) = X$ si et seulement si la condition suivante est vérifiée: $x_i \in Sx_i^*$ $(i = 1, 2,...)$ et $\| x_i^* \| \to +\infty$ entraînent que la suite $x_1, x_2, ...$ ne converge pas pour la norme de X.*

Démonstration. Posons $T = S^{-1}$. La condition de l'énoncé signifie que T est localement borné en chaque point de cl $D(T)$. D'après la proposition 9.2, ceci implique que $\operatorname{cl} D(T) = \operatorname{int} D(T)$, d'où $D(T) = X$. Inversément la proposition 9.1 montre que si $D(T) = X$, alors T est localement borné en chaque point de X. Q.E.D.

La condition nécessaire et suffisante du corollaire 9.2 est satisfaite lorsque $S^{-1} : X \to X^*$ transforme un borné en un borné, en particulier lorsque S est coercif. On retrouve ainsi un résultat qu'on aurait pu obtenir directement à partir de la résolvante approchée $(\lambda G_\epsilon + S)^{-1}$ en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 8.1.

10. APPLICATION

Soit Ω un ouvert borné de R^n, de frontière Γ suffisamment régulière. On considère le problème suivant: trouver u solution de

$$-\Delta u + p(u) = f \qquad \text{dans } \Omega, \tag{10.1}$$

$$u = 0 \qquad \text{sur } \Gamma. \tag{10.2}$$

L'exemple classique correspond à $p(u) = |u|^\rho u$ avec $\rho > -1$ et se traite [16] dans le cadre des espaces de Sobolev habituels. On a ici en vue le cas $p(u) = ue^{|u|}$ pour lequel il faut utiliser des *espaces d'Orlicz non réflexifs*.

Rappelons quelques définitions (voir [14]). Soit $M : R \to R^+$ une N-fonction: $M(u) = \int_0^u p(t)\,dt$ où $p : R \to R$ est impaire et non décroissante, continue à droite pour $t \geqslant 0$, positive pour $t > 0$ et tend vers $+\infty$ quand $t \to +\infty$. On désigne par $\mathscr{L}_M(\Omega)$ l'ensemble des (classes de) fonctions u mesurables sur Ω à valeurs réelles telles que $\int_\Omega M(u(x))\,dx < \infty$ et par $\mathscr{H}_M(\Omega)$ l'espace vectoriel engendré par $\mathscr{L}_M(\Omega)$; la jauge de

$$\left\{u \in \mathscr{L}_M(\Omega); \int_\Omega M(u(x))\,dx \leqslant 1\right\}$$

définit sur $\mathscr{H}_M(\Omega)$ une norme $\|\ \|_{\mathscr{H}_M(\Omega)}$ qui en fait un espace de Banach. Soit $\mathscr{E}_M(\Omega)$ la fermeture de $L^\infty(\Omega)$ dans $\mathscr{H}_M(\Omega)$; $\mathscr{E}_M(\Omega)$ muni de la norme induite par $\mathscr{H}_M(\Omega)$ est séparable, et on a les inclusions $\mathscr{E}_M(\Omega) \subset \mathscr{L}_M(\Omega) \subset \mathscr{H}_M(\Omega)$, avec égalité si et seulement si M satisfait la Δ_2-condition: il existe k et u_0 tels que $M(2u) \leqslant kM(u)$, $\forall u \geqslant u_0$. Le dual de $\mathscr{E}_M(\Omega)$ s'identifie, au moyen du produit scalaire $\int_\Omega u(x)\,v(x)\,dx$, à $\mathscr{H}_N(\Omega)$ où N est la N-fonction conjuguée (cf. (1.1)) de M.

THÉORÈME 10.1. *Soit $M(u) = \int_0^u p(t)\,dt$ une N-fonction. On suppose en plus:* (i) *p continue;* (ii) *$\inf_{t\neq 0} p(kt)/p(t) \to +\infty$ quand $k \to +\infty$;* (iii) *la N-function N conjuguée de M satisfait la Δ_2-condition. Soit f donné dans $H^{-1}(\Omega) + \mathscr{H}_N(\Omega)$. Il existe alors une et une seule solution u de* (10.1) *et* (10.2) *vérifiant $u \in H^1(\Omega) \cap \mathscr{H}_M(\Omega)$ et $p(u) \in \mathscr{H}_N(\Omega)$.*

Démonstration. On pose $X = H_0^1(\Omega) \cap \mathscr{E}_M(\Omega)$; c'est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_X = \sup\{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}; \|u\|_{\mathscr{E}_M(\Omega)}\}.$$

Son dual X^* s'identifie à $H^{-1}(\Omega) + \mathscr{H}_N(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ et son bidual X^{**} à $H_0^1(\Omega) \cap \mathscr{H}_M(\Omega)$; X et X^* sont séparables.

D'après [14, p. 186], $p(u) \in \mathscr{H}_N(\Omega)$ lorsque $u \in \mathscr{E}_M(\Omega)$, d'où la formule

$$\langle v, Tu\rangle = \sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx + \int_\Omega p(u)\,v\,dx$$

définit pour chaque $u \in X$ un élément $Tu \in X^*$, qui n'est autre que le gradient (de Fréchet) en u de la fonctionnelle

$$X \to R : v \to \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2 dx + \int_\Omega M(v)\,dx.$$

L'opérateur $T : X \to X^*$ est donc monotone de type dense (théorème 3.1). Montrons qu'il est coercif. Il suffit essentiellement de prouver que

$$\frac{1}{\| u \|_{\mathscr{E}_M(\Omega)}} \int_\Omega p(u)\, u\, dx \to +\infty \qquad \text{quand} \qquad \| u \|_{\mathscr{E}_M(\Omega)} \to +\infty. \tag{10.3}$$

L'hypothèse (ii) signifie qu'il existe $k_0 > 0$ et $h : [k_0, +\infty[\to R^+$ continue tels que

$$\lim_{k \to +\infty} h(k) = +\infty$$

et

$$p(kt) \geqslant h(k)\, p(t), \qquad \forall t \geqslant 0, \qquad \forall k \geqslant k_0;$$

ceci donne par intégration

$$M(kv) \geqslant kh(k)\, M(v), \qquad \forall v \in R, \qquad \forall k \geqslant k_0 .$$

On a alors, pour $\epsilon > 0$ et $\| u \|_{\mathscr{E}_M(\Omega)} \geqslant k_0 + \epsilon$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega M(u)\, dx &\geqslant (\| u \|_{\mathscr{E}_M(\Omega)} - \epsilon)\, h(\| u \|_{\mathscr{E}_M(\Omega)} - \epsilon) \int_\Omega M\left(\frac{u}{\| u \|_{\mathscr{E}_M(\Omega)} - \epsilon}\right) dx \\ &\geqslant (\| u \|_{\mathscr{E}_M(\Omega)} - \epsilon)\, h(\| u \|_{\mathscr{E}_M(\Omega)} - \epsilon)\end{aligned}$$

par définition de $\| \ \|_{\mathscr{E}_M(\Omega)}$; d'où

$$\int_\Omega M(u)\, dx \geqslant \| u \|_{\mathscr{E}_M(\Omega)}\, h(\| u \|_{\mathscr{E}_M(\Omega)})$$

pour $\| u \|_{\mathscr{E}_M(\Omega)} > k_0$, ce qui, joint à

$$p(v)\, v = M(v) + N(p(v)), \qquad \forall v \in R, \tag{10.4}$$

entraîne (10.3).

Par conséquent le théorème 8.1 assure l'existence de

$$u \in X^{**} = H_0^1(\Omega) \cap \mathscr{H}_M(\Omega)$$

vérifiant $f \in \bar{T}u$, relation qu'il reste à interpréter.

Posons $D(A) = \{u \in X^{**}; p(u) \in \mathscr{H}_N(\Omega)\}$ et $Au = -\Delta u + p(u)$ pour $u \in D(A)$. Il est clair que $A : X^{**} \to X^*$ prolonge T et est monotone. On va prouver que A est fermé pour la topologie $\mathscr{T}_2$. Comme T est monotone de type dense, il en résultera (lemme 2.1) que $\bar{T} = A$, ce qui achèvera la démonstration d'existence.

Il suffit de vérifier que A est séquentiellement fermé pour $\mathscr{T}_2$, cf. N° 2. Soit donc $\{u_i; i \in N\}$ une suite dans $D(A)$ telle que $u_i \to u$ pour $\sigma(X^{**}, X^*)$,

$\| u_i \|_{X^{**}} \to \| u \|_{X^{**}}$ et $Au_i \to g$ en norme dans X^*. D'après le théorème de Rellich-Kondrachoff, $u_i \to u$ en mesure, d'où

$$p(u_i) \to p(u) \text{ en mesure.} \tag{10.5}$$

Mais

$$p(u_i) \text{ reste borné dans } \mathscr{K}_N(\Omega). \tag{10.6}$$

En effet, il suit de (10.4) que

$$\int_\Omega N(p(u_i))\,dx \leqslant \int_\Omega p(u_i)\,u_i\,dx = \langle u_i\,, Au_i\rangle + \sum_{j=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dx;$$

par conséquent $\int_\Omega N(p(u_i))\,dx$ reste borné, ce qui d'après [14, p. 77] implique (10.6). Moyennant alors [14, p. 132] (on pourrait aussi adapter [15, p. 10]), on déduit de (10.5) et (10.6) que $p(u) \in \mathscr{K}_N(\Omega)$ et que $p(u_i) \to p(u)$ pour $\sigma(\mathscr{K}_N(\Omega), \mathscr{E}_M(\Omega))$. Par suite $u \in D(A)$, et en passant à la limite dans

$$\langle v, Au_i\rangle = \sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx + \int_\Omega p(u_i)\,v\,dx$$

pour v fixé $\in X$, on obtient $Au = g$.

L'unicité de la solution résulte du fait que $A : X^{**} \to X^*$ est strictement monotone. Q.E.D.

Remarques. 1. Il suit de (10.4) que la solution u appartient en fait à $\mathscr{L}_M(\Omega)$.

2. On trouvera dans [14, p. 25 et suivantes] diverses conditions portant sur p pour que (iii) ait lieu. Par exemple si p est convexe pour t suffisamment grand, alors p satisfait (iii).

Les hypothèses du théorème 10.1 sont remplies lorsque $p(u) = |\,u\,|^\rho\, u$ avec $\rho > -1$ ou $p(u) = ue^{|u|}$ (employer la remarque ci-dessus). Dans le second cas, M ne vérifie pas la Δ_2-condition, d'où les espaces de Banach utilisés ne sont pas réflexifs.

Corollaire 10.1 (cf. [16]). *Soit $f \in H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)$ où $1/p + 1/p' = 1$ et $p = \rho + 2$, $\rho > -1$. Il existe un et un seul u dans $H^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ vérifiant*

$$-\Delta u + |\,u\,|^\rho\, u = f \qquad \textit{dans } \Omega \textit{ et} \qquad u = 0 \qquad \textit{sur } \Gamma.$$

Corollaire 10.2. *Soient $M(u) = |\,u\,|\,e^{|u|} - e^{|u|} + 1$ et N la N-fonction conjuguée. Soit $f \in H^{-1}(\Omega) + \mathscr{K}_N(\Omega)$. Il existe un et un seul u vérifiant $u \in H^1(\Omega) \cap \mathscr{K}_M(\Omega)$, $ue^{|u|} \in \mathscr{K}_N(\Omega)$,*

$$-\Delta u + ue^{|u|} = f \qquad \textit{dans } \Omega \textit{ et} \qquad u = 0 \qquad \textit{sur } \Gamma.$$

Acknowledgment

Cet article est extrait d'une thèse de doctorat présentée à l'Université Libre de Bruxelles sous la direction de M. T. Lepage et M. L. Waelbroeck. L'auteur remercie vivement M. J. L. Lions et M. R. T. Rockafellar pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Bibliographie

1. J. C. Aggeri et C. Lescarret, Fonctions convexes duales associées à un couple d'ensembles mutuellement polaires, *C.R. Acad. Sci. Paris* **260** (1965), 6011–6014.
2. E. Asplund, Positivity of duality mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 200–203.
3. E. Bishop et R. R. Phelps, The support functionals of a convex set, *Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc.* **7** (1963), 27–35.
4. H. Brezis et G. Stampacchia, Sur la régularité de la solution d'inéquations élliptiques, *Bull. Soc. Math. France* **96** (1968), 153–180.
5. A. Brøndsted et R. T. Rockafellar, On the subdifferentiability of convex functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 605–611.
6. F. E. Browder, Nonlinear elliptic functional equations in a non-reflexive Banach space, *Bull. Amer. Math. Soc.* **72** (1966), 89–95.
7. F. E. Browder, Nonlinear maximal monotone operators in Banach spaces, *Math. Ann.* **175** (1968), 89–113.
8. F. E. Browder, The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, *Math. Ann.* **177** (1968), 283–301.
9. F. E. Browder, Nonlinear variational inequalities and maximal monotone mappings in Banach spaces, *Math. Ann.* **183** (1969), 213–231.
10. F. E. Browder, Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces, *Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc.* **18**, Part 2, à paraître.
11. H. Debrunner et P. Flor, Ein Erweiterungssatz für monotone Mengen, *Archiv Math.* **15** (1964), 445–447.
12. J. P. Gossez, Ensembles virtuellement convexes et opérateurs monotones, *Bull. Sci. Math. Paris* **94** (1970), 73-80.
13. R. C. James, Characterizations of reflexivity, *Studia Math.* **23** (1964), 205–216.
14. M. A. Krasnosel'skii et Y. B. Rutickii, "Convex Functions and Orlicz Spaces," Groningen, Noordhoff, 1961.
15. J. Leray et J. L. Lions, "Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder," Sém. Eq. Dér. Part., Collège de France, 1964.
16. J. L. Lions, "Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires," Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
17. G. J. Minty, Monotone (nonlinear) operators in a Hilbert space, *Duke Math. J.* **29** (1962), 341–346.
18. G. J. Minty, On the monotonicity of the gradient of a convex function, *Pacific J. Math.* **14** (1964), 243–247.
19. G. J. Minty, On the generalization of a direct method of the calculus of variations, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 315–321.
20. J. J. Moreau, Proximité et dualité dans un espace Hilbertien, *Bull. Soc. Math. France* **93** (1965), 273–299.

21. J. J. Moreau, "Fonctionnelles convexes," Sém. Éq. Dér. Part., Collège de France, 1967.
22. R. T. Rockafellar, Extensions of Fenchel's duality theorem for convex functions, *Duke Math. J.* **33** (1966), 81–90.
23. R. T. Rockafellar, Characterization of the subdifferentials of convex functions, *Pacific J. Math.* **17** (1966), 497–510.
24. R. T. Rockafellar, On the maximal monotonicity of subdifferential mappings, *Pac. J. Math.* **33** (1970), 209-216.
25. R. T. Rockafellar, Local boundedness of nonlinear monotone operators, *Mich. Math. J.* **16** (1969), 397–407.
26. R. T. Rockafellar, On the maximality of sums of nonlinear monotone operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* **149** (1970), 75-88
27. R. T. Rockafellar, On the virtual convexity of the domain and range of a nonlinear maximal monotone operator, *Math. Ann.* **185** (1970), 81-90.
28. R. T. Rockafellar, Convex functions, monotone operators and variational inequalities, *in* "Proc. Venice Inst. Monotone Operators," (A. Ghizzetti, Ed.), Gubbio, Oderisi, 1969.
29. R. T. Rockafellar, Monotone operators associated with saddle-functions and Minimax problems, *Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc.* **18** (1970), 241–250, Part 1.